セシャドリ定数と定義多項式の次数について

伊藤, 敦

代数幾何学シンポジウム記録
2012年度　pp.98-107

セシャドリ定数と定義多項式の次数について

伊藤　敦*

概要

セシャドリ定数は豊富な直線束の局所的な正値性を測る不変量である．本稿ではセシャドリ定数と定義多項式の次数の関係を概説する．本研究は三浦真人氏との共同研究である．

1　導入

多様体などはすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義されているものとする．射影代数多様体 X 上の豊富な直線束 L はある種の正値性を持っているので，以下の問は自然なものと思われる．

問 1.1. L の正値性はどうすれば計れるだろうか？

L の正値性をはかる基本的な不変量として体積 $L^{\dim X}$ がある．もちろんこれは非常に重要な不変量であるが，体積だけでは必ずしも十分とは言いがたい．

例 1.2. $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $L_1 = \mathcal{O}(k,k)$, $L_2 = \mathcal{O}(1,k^2)$ とする．この時，$K_X + L_1$ は $k \geq 2$ の場合は基底点自由であり，$k \geq 3$ の場合は非常に豊富である．一方 $K_X + L_2$ は有効的でさえない．

この例のように，二つの直線束の体積が同じでもその随伴束の振る舞いが大きく異なる場合がある．随伴束の視点からは，L_1 のほうが L_2 よりも正値性が大きいとみることができる．

20 年ほど前に Demailly は豊富な直線束の局所的な正値性を測る不変量であるセシャドリ定数を導入した [Dem].

* 東京大学数理科学研究科　itoatsu@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 1.3. 射影代数多様体 X 上の豊富な直線束 L と点 $p \in X$ に対し，L の p における**セシャドリ定数** $\varepsilon(X, L; p)$ を

$$\varepsilon(X, L; p) := \max\{\, t \geq 0 \,|\, \mu^* L - tE \text{ がネフ} \,\}$$

と定める．ここで $\mu : \widetilde{X} \to X$ は p での爆発，$E = \mu^{-1}(p)$ はその例外因子である．また

$$\varepsilon(X, L; p) = \inf_C \left\{ \frac{C.L}{\mathrm{mult}_p(C)} \right\}$$

という同値な定義もある．ここで下限は X 上の既約かつ被約な曲線 C で p を通るものに対してとり，$\mathrm{mult}_p(C)$ は C の p における重複度である．$\varepsilon(X, L; p) = \dfrac{C.L}{\mathrm{mult}_p(C)}$ となる曲線 C を L の p における**セシャドリ曲線**と呼ぶ.

注意 1.4. セシャドリ曲線が存在しない例を筆者は知らない．ただし，セシャドリ定数が有理数でない例があれば，それはセシャドリ曲線が存在しない例にもなっている．セシャドリ定数が有理数でない例を見つけることは，セシャドリ定数における未解決問題の一つである.

セシャドリ定数の簡単な例を見てみよう.

例 1.5. (1) 任意の点 $p \in \mathbb{P}^n$ に対し $\varepsilon(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1); p) = 1$.
(2) 任意の点 $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対し $\varepsilon(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(a, b); p) = \min\{a, b\}$.
(3) 非特異 3 次曲面 $S \subset \mathbb{P}^3$ に対し

$$\varepsilon(S, \mathcal{O}_S(1); p) = \begin{cases} 1 & S \text{ 上に点 } p \text{ を通る直線が存在する場合,} \\ 3/2 & S \text{ 上に点 } p \text{ を通る直線が存在しない場合.} \end{cases}$$

これらの場合はセシャドリ曲線を具体的に見つけることができる．(1) と (3) の前者では p を通る直線が，(2) では $p = (p_1, p_2)$ に対し $\{p_1\} \times \mathbb{P}^1$ もしくは $\mathbb{P}^1 \times \{p_2\}$ の少なくとも一方がセシャドリ曲線である．(3) の後者の場合は p で S に接するような超平面 $H \subset \mathbb{P}^3$ に対し $C := H \cap S$ とおくと，$\deg(C) = C.\mathcal{O}_S(1) = 3$, $\mathrm{mult}_p(C) = 2$ が成り立ち C がセシャドリ曲線であることがわかる.

セシャドリ定数は様々な興味深い性質を持っている．例えば，セシャドリ定数の下界からは随伴束のジェット分離やグロモフ幅（実シンプレクティック幾何学の不変量）の下界が得られる [Dem], [MP]．また上界からは，ファイバー構造や葉層構造が得られることもある [Na1], [Na2], [HK]．Ross と Thomas による偏極多様体のスロープ安定性を定義する際にもセシャドリ定数が用いられる [RT].

しかしながら，与えられた豊富な直線束に対し具体的にセシャドリ定数の値を求めることは一般には非常に難しい．例えば $\mathbb{P}^3$ 内の次数が 5 以上の非特異射影曲面についてさえ（幾つかの評価はあるが）一般にその値は求められていない．特に 3 次元以上の場合の計算例は少ない．セシャドリ定数の詳しい扱いについては [La, Chapter 5], [B+] を参照されたい．

本稿では，代数多様体 X が射影空間に埋め込まれている場合を扱う．そのような場合，$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ は X の定義多項式の次数を用いて評価できることを解説する．まず第 2 節では，次数 4 の 3 次元超曲面 X について $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ の値の求め方を説明する．第 3 節では，定義多項式の次数を用いてセシャドリ定数を下から評価できることを述べる．第 4 節では，第 3 節で得られた下界が幾つかのファノ多様体に対してはセシャドリ定数と一致することを述べる．これらは三浦真人氏との共同研究 [IM] である．

謝辞

この度，歴史ある城崎代数幾何シンポジウムにおける講演の機会をくださった世話人の永井保成さん，松下大介さん，山木壱彦さんに感謝致します．

2　次数 4 の 3 次元超曲面の場合

$X \subset \mathbb{P}^4$ を次数 4 の超曲面，p を X 上の点とする．簡単のため X も p も一般のものとする．この節では，$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ をどう計算するかを説明する．ここにあらわれるアイデアを自然に一般化することで，本稿で説明するほぼすべて（小節 4.2 以外の部分）が得られる．

$p = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$ となるような $\mathbb{P}^4$ の斉次座標 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をとる．X の定義式 $f \in H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(4))$ は x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 の 4 次斉次多項式で $f(p) = 0$ なので，$f = x_0^3 f_1 + x_0^2 f_2 + x_0 f_3 + f_4$ となるような i 次の斉次多項式 $f_i \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ $(1 \leq i \leq 4)$ がとれる．X と p が一般なので

$$(f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0) \subset \operatorname{Proj} \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4] \qquad (\dagger)$$

は空集合になる．

X 上の有効因子 D_1, D_2, D_3 を

$$D_1 := (f_1 = 0)|_X, \quad D_2 := (x_0 f_1 + f_2 = 0)|_X, \quad D_3 := (x_0^2 f_1 + x_0 f_2 + f_3 = 0)|_X$$

で定める．X 上では $f_1|_X = -x_0^{-3}(x_0^2f_2+x_0f_3+f_4)|_X$ なので，$\mathrm{ord}_p(D_1)=2$ であることがわかる．ここで X 上の有効因子 D に対し $\mathrm{ord}_p(D)$ を

$$\mathrm{ord}_p(D) := \max\{\, m \geq 0 \mid g \in \mathfrak{m}_{X,p}^m \}$$

と定める．ただし g は p の近傍での D の定義関数，$\mathfrak{m}_{X,p}$ は X の p における極大イデアルである．同様に $\mathrm{ord}_p(D_2)=3$, $\mathrm{ord}_p(D_3)=4$ が成り立つ．また定義より

$$\begin{aligned} D_1 \cap D_2 \cap D_3 &= (f_1=f_2=f_3=0)|_X \\ &= (f_1=f_2=f_3=f_4=0) \subset \mathbb{P}^4 = \mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] \end{aligned}$$

であるが，(†) より $D_1\cap D_2\cap D_3=\{p\}$ となる．(†) では $\mathrm{Proj}\,\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3,x_4] \cong \mathbb{P}^3$ のなかで共通零点を考えていたが，ここでは $\mathbb{P}^4$ のなかで考えていることに注意する．

まず $\varepsilon(X,\mathcal{O}_X(1);p)$ を下から評価しよう．既約かつ被約な曲線 C で p を通るものを一つ固定する．$D_1\cap D_2\cap D_3=\{p\}$ なので，ある D_i $(1\leq i\leq 3)$ で C を含まないものがとれる．$D_i \sim \mathcal{O}_X(i)$, $\mathrm{ord}_p(D_i)=i+1$ より，D_i と C の p での局所交点数を考えることで

$$i\,\deg(C) = D_i.C \geq \mathrm{ord}_p(D_i)\cdot \mathrm{mult}_p(C) = (i+1)\,\mathrm{mult}_p(C)$$

が得られる．従って $\dfrac{\deg(C)}{\mathrm{mult}_p(C)} \geq \dfrac{i+1}{i} \geq \dfrac{4}{3}$ が成り立つので，定義 1.3 より $\varepsilon(X,\mathcal{O}(1);p)\geq \dfrac{4}{3}$ となる．

次に $\varepsilon(X,\mathcal{O}_X(1);p)$ を上から評価しよう．

$$C' := D_1\cap D_2 = (f_1=f_2=x_0f_3+f_4=0)\subset \mathbb{P}^4$$

とおくと，定義から $p\in C'\subset X$ である．また C' は $\mathbb{P}^4$ の中の 3 つの有効因子 $(f_1=0)$, $(f_2=0)$, $(x_0f_3+f_4=0)$ の完全交差なので，C' の次数や重複度は各因子の次数や重複度の積になる（f_1,f_2,f_3,f_4 が一般の元であることに注意する）．従って

$$\deg(C') = 1\cdot 2\cdot 4,\quad \mathrm{mult}_p(C') = 1\cdot 2\cdot 3$$

なので，$\varepsilon(X,\mathcal{O}(1);p)\leq \dfrac{\deg(C')}{\mathrm{mult}_p(C')} = \dfrac{4}{3}$ が成り立つ．

上下からの評価を合わせることで $\varepsilon(X,\mathcal{O}(1);p)=\dfrac{4}{3}$ が得られる．この場合 C' がセシャドリ曲線になっている．

3　定義多項式の次数を用いた下界

この節では，前節で説明した下からの評価を一般化する．

X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体，p を X 上の点とすると，定義より

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) \geq \varepsilon(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1); p) = 1$$

が成り立つ．さらに $\varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) = 1$ となることと，X 上に点 p を通る直線が存在することが同値であることがわかる（[Ch, Lemma 2.2]）．ここで直線とは，射影空間内の次数 1 の射影代数曲線のこととする．

X が 2 次元または 3 次元の場合，Bauer と Chan が多様体の**次数** $\deg(X) := \mathcal{O}_X(1)^{\dim X}$ を用いて $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ の下界を与えた．

定理 3.1 ([Ba, Theorem 2.1], [Ch, Theorem 1.4] 参照)**.** X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の 2 次元もしくは 3 次元非特異射影代数多様体，p を X 上の点とする．もし X 上に点 p を通る直線がなければ

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) \geq \frac{\deg(X)}{\deg(X) - 1}$$

が成り立つ．

この節では，上記の定理の高次元への一般化を述べる．そのために $\deg(X)$ の代わりに次の不変量を用いる．

定義 3.2. X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体，p を X 上の点とする．正の整数 $d_p(X)$ を，自然な写像

$$H^0(\mathbb{P}^N, I_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \to I_X \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$$

が p で全射になるような d の最小値として定義する．ここで $I_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ は X に対応するイデアル層である．すなわちスキーム論的に X は p において次数が $d_p(X)$ 以下の超曲面によって定義される．

以下が本節の主結果である．定理 3.1 とは異なり，X の非特異性は仮定していないことに注意する．

定理 3.3 ([IM, Theorem 1.5]). X を射影空間 $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体，p を X 上の点とする．もし X 上に点 p を通る直線がなければ

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) \geq \frac{d_p(X)}{d_p(X) - 1}$$

が成立する．さらに任意の $n \geq 1$ と $d \geq 2$ に対し，ある n 次元非特異射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ と点 $p \in X$ が存在し，$d = d_p(X)$ かつ上の不等号において等号が成り立つ．

注意 3.4. 一般に，射影代数多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ と点 $p \in X$ に対し $d_p(X) \leq \deg(X)$ が成り立つ ([Mu, Theorem 1] の証明を参照)．したがって定理 3.3 は定理 3.1 の高次元への拡張になっている．

定理 3.3 の証明は，本質的に第 2 節と同じである．すなわち p を通る曲線 C に対し，X の定義多項式を "いじる" ことにより，ある $i \leq d_p(X) - 1$ と C を含まない有効因子 $D \sim \mathcal{O}_X(i)$ で $\mathrm{ord}_p(D) \geq i + 1$ となるものがとれる．

4 幾つかのファノ多様体の場合

定理 3.3 の下界は一般には良い評価ではない．実際 $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p)$ はいくらでも大きい値を取りうるが，定理 3.3 の下界はたかだか 2 だからである．しかしながら，幾つかのファノ多様体については定理 3.3 で等号が成立することを示すことができる．

定理 4.1 ([IM, Theorem 1.7]). $Y \subset \mathbb{P}^N$ をピカール数 1 の有理等質空間で，$\mathcal{O}_Y(1)$ が $\mathrm{Pic}(Y)$ の生成元であるものとする．Y の部分多様体 X を，次数 $d_1 \leq \ldots \leq d_r$ の超曲面の Y における完全交差で $-K_X = \mathcal{O}_X(1)$ となるものとする．点 $p \in X$ に対し X 上に点 p を通る直線がなければ，

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) = \frac{d_p(X)}{d_p(X) - 1} = \begin{cases} d_r/(d_r - 1) & d_r \geq 2 \text{ の場合,} \\ 2 & d_r = 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

が成立する．

注意 4.2. $X \subset Y$ を次数 $d_1 \leq \ldots \leq d_r$ の超曲面の Y における完全交差として得られる代数多様体で，$-K_X = \mathcal{O}_X(i)$，$i \geq 2$ となるものとする．この場合 X は直線で覆われることが簡単に確かめられる ([Deb, Proposition 2.13])．よって $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) = 1$ が任意の $p \in X$ に対して成り立つ．

従って定理 4.1 と組み合わせると，ピカール数 1 の有理等質空間における完全交差として得られるファノ代数多様体のセシャドリ定数は計算できることがわかる．

例 4.3. $Y=\mathbb{P}^{r+3}$ 内の次数 $d_1 \leq \ldots \leq d_r$ の超曲面の完全交差として得られる 3 次元ファノ多様体 $X=X_{d_1,\ldots,d_r}$ で $-K_X=\mathcal{O}(1)$ となるものを考える．随伴公式より，このような多様体は $X_4, X_{2,3}, X_{2,2,2}$ に限られる．X 上に点 p を通る直線がなければ，以下が成り立つ．

$$\varepsilon(X_4,\mathcal{O}(1);p)=\frac{4}{3},\quad \varepsilon(X_{2,3},\mathcal{O}(1);p)=\frac{3}{2},\quad \varepsilon(X_{2,2,2},\mathcal{O}(1);p)=2.$$

X のファノ指数が 1 なので，X が非特異の場合一般の点 $p \in X$ を通る X 上の直線は存在しないことに注意する．

定理 4.1 の片方の不等号は定理 3.3 から簡単に従う．実際，定理 4.1 のような Y に対して $d_p(Y)$ は 1（Y が射影空間の場合）か 2（それ以外の場合）であることが知られている（例えば [Li] を参照）ので，

$$\varepsilon(X,\mathcal{O}_X(1);p) \geq \frac{d_p(X)}{d_p(X)-1} \geq \begin{cases} d_r/(d_r-1) & d_r \geq 2 \text{ の場合}, \\ 2 & d_r=1 \text{ の場合} \end{cases}$$

が従う．以下の小節で逆向きの不等号の証明のアイデアについて説明する．

4.1 証明の概略：$d_r \geq 2$ の場合

この場合，証明のアイデアは本質的に第 2 節と同じである．すなわち，適当な有効因子の交差をとることでセシャドリ曲線を見つけることができる．ただし有理等質空間 Y が射影空間ではない場合は Y を直接切るのではなく，適当な錐といくつかの有効因子の交差をとる．そのために直線のモジュライ空間を用いる．

定義 4.4. 射影代数多様体 $Y \subset \mathbb{P}^N$ と点 $p \in X$ に対し，Y のヒルベルト空間 $\operatorname{Hilb} Y$ の部分スキーム $F_p(Y)$ を

$$F_p(Y) := \{\, [l] \in \operatorname{Hilb} Y \mid l \text{ は点 } p \text{ を通る } Y \text{ 上の直線} \,\}$$

と定める．

Y が定理 4.1 のような有理等質空間，Z を $F_p(Y)$ の既約成分とする．定義より

$$\operatorname{Cone}_p(Z) := \bigcup_{[l]\in Z} l \subset \mathbb{P}^N$$

は p を頂点とする錐で Y に含まれる．X を定理 4.1 のようなファノ多様体で，X 上に p を通る直線がないものとする．$d_r \geq 2$ の場合，$\operatorname{Cone}_p(Z)$ を適当な有効因子で切ることに

より X 上の曲線 C で $\dfrac{\deg(C)}{\mathrm{mult}_p(C)} \le \dfrac{d_r}{d_r-1}$ となるものが取れる．第 2 節では，そのような C として $C' = (f_1 = f_2 = x_0 f_3 + f_4 = 0)$ をとったが，$x_0 f_3 + f_4$ のような式を得るために $d_r \ge 2$ という仮定が必要になる．

同様の議論で以下の定理を示せる．この定理では，ピカール数や Y の特異点について特に仮定をしていないことに注意する．

定理 4.5 ([IM, Theorem 3.1])**.** Y を $\mathbb{P}^N$ 内の射影代数多様体，p を Y 上の点とする．p を含む Y の部分射影代数多様体 X が以下を満たすとする．

i) p の近傍で，X は次数 $d_1 \le \ldots \le d_r$ の超曲面の Y における局所完全交差である．すなわち $r = \mathrm{codim}(X, Y)$ で各 j に対してある $f_j \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_j))$ が存在し

$$X = Y \cap \bigcap_{1 \le j \le r} (f_j = 0)$$

が p の近傍で成り立つ．

ii) $F_p(Y) \ne \emptyset$ かつ $\sum_{j=1}^r d_j \le \dim F_p(Y) + 1$.

iii) $d_p(Y) \le d_r$.

この時以下が成立する．

$$\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(1); p) = \begin{cases} 1 & F_p(X) \ne \emptyset \text{ の場合}, \\ d_r/(d_r-1) & F_p(X) = \emptyset \text{ の場合}. \end{cases}$$

4.2 証明の概略：$d_r = 1$ の場合

定理 4.1 で $d_r = 1$ の場合，Y は射影空間ではないとしてよい．すると $d_p(Y) = 2$ かつ $d_r = 1$ なので，$d_p(X) = 2$ である．よって定理 3.3 によって得られる下界は $\dfrac{d_p(X)}{d_p(X)-1} = 2$ となる．もし X 上に点 p を通る滑らかな 2 次曲線 C が存在すれば

$$2 \le \varepsilon(X, \mathcal{O}(1); p) \le \frac{\deg(C)}{\mathrm{mult}_p(C)} = 2$$

がいえる．そのような滑らかな 2 次曲線の存在を示す為に以下の命題を用いる．

命題 4.6. $Y \subset \mathbb{P}^N$ を非特異射影代数多様体で以下を満たすものとする．

i) $I_{Y/\mathbb{P}^N} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(2)$ は大域切断によって生成される．

ii) 一般の点 $p \in Y$ に対し,

$$\dim\{\,[C] \in \mathrm{Hilb}\, Y \,|\, C \text{ は点 } p \text{ を通る } Y \text{ 上の滑らかな 2 次曲線}\,\} = 2$$

が成り立つ.

この時,一般の点 $p \in Y$ と p を含む一般の超平面 $H \subset \mathbb{P}^N$ に対し,p を通る $Y \cap H$ 上の滑らかな 2 次曲線が存在する.

定理 4.1 の証明の概略:$d_r = 1$ **の場合.** $d_r = 1$ なので $X = Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r$, $H_j \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$ とかける.セシャドリ定数はある種の下半連続性を持つので,上界を求めるためには点 p や H_j は一般のもの仮定してよい.この時 $Y' := Y \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{r-1}$ は命題 4.6 の条件 i), ii) をみたすことがわかるので,点 p を通る $X = Y' \cap H_r$ 上の滑らかな 2 次曲線の存在がいえる. □

参考文献

[Ba] T. Bauer, *Seshadri constants on algebraic surfaces*, Math. Ann. **313** (1999), no. 3, 547-583.

[B+] T. Bauer, S. Di Rocco, B. Harbourne, M. Kapustka, A. Knutsen, W. Syzdek, and T. Szemberg, *A primer on Seshadri constants*, Interactions of classical and numerical algebraic geometry, 33-70, Contemp. Math., **496**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Ch] K. Chan, *A lower bound on Seshadri constants of hyperplane bundles on three-folds*, Math. Z. **264** (2010), no. 3, 497-505.

[Deb] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001. xiv+233 pp.

[Dem] J.P. Demailly, *Singular Hermitian metrics on positive line bundles*, Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), 87-104, Lecture Notes in Math., **1507**, Springer, Berlin, 1992.

[HK] J.-M. Hwang and J.H. Keum, *Seshadri-exceptional foliations*, Math. Ann. **325** (2003), no. 2, 287-297.

[IM] A. Ito and M. Miura, *Seshadri constants and degrees of defining degrees*, preprint (2012).

[La] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I*, Ergebnisse der Mathematik undihrer Grenzgebiete, vol. **48**. Springer, Berlin (2004).

[Li] W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), no. 4, 605-608.

[Mu] D. Mumford, *Varieties defined by quadratic equations*, 1970 Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969) pp. 29-100 Edizioni Cremonese, Rome.

[MP] D. McDuff and L. Polterovich, *Symplectic packings and algebraic geometry*, Invent. Math. **115** (1994), no. 3, 405-434.

[Na1] M. Nakamaye, *Seshadri constants on abelian varieties*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 3, 621-635.

[Na2] M. Nakamaye, *Seshadri constants and the geometry of surfaces*, J. Reine Angew. Math. **564** (2003), 205-214.

[RT] J. Ross and R. Thomas, *A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties*, J. Algebraic Geom. **16** (2007), no. 2, 201-255.